Contrôle des connaissances du chapitre 6 - Corrigés

A. Questions de cours

1) Un taux à terme implicite est un taux à terme calculé à partir de la courbe des taux zéro-coupon en appliquant la théorie de l'absence d'opportunité d'arbitrage. Par exemple, le taux à terme implicite à un an dans un an est le taux à terme dérivé des taux zéro-coupon à un et à deux ans en supposant que placer à deux ans au taux zéro-coupon à deux ans ou placer deux fois successivement à un an, au taux zéro-coupon à un an pendant la première année, puis au taux à terme à un dans un an la deuxième année, aboutit à la même valeur future dans deux ans.
2) L'obligation avec clause de remboursement anticipe (CRA) au gré de l'émetteur a le *spread* zéro-coupon le plus élevé car ce *spread* intègre une prime de risque d'option. En effet, la CRA étant au gré de l'émetteur, le risque d'option est supporté par l'investisseur qui exige une prime en compensation. Le *spread* zéro-coupon de l'obligation vanille ne comporte pas de prime d'option. En revanche, le *spread* risque-neutre est identique pour les deux obligations.
3) La courbe des taux zéro-coupon se construit à partir des taux de rendement des obligations sans risque par itérations successives. Supposons que nous disposons des TRA d'obligations à taux fixe sans risque de un à quatre ans. Le taux zéro-coupon à un an est égal au TRA à un an. Le taux zéro-coupon à deux ans s'obtient en posant que la valeur actuelle de l'obligation à deux ans découlant de son TRA doit être égale à la somme de son premier paiement actualisé au taux zéro-coupon à un an et de son deuxième paiement actualisé au taux zéro-coupon à deux ans. Le taux zéro-coupon à trois ans s'obtient en appliquant un raisonnement similaire à l'obligation à trois ans et ainsi de suite jusqu'à la maturité quatre ans.
4) Selon la théorie des anticipations non biaisées, les taux à terme implicites à la courbe des taux révèlent les anticipations du marché sur les taux courts futurs. Ainsi, le taux à terme à un an dans t années dérivé de la courbe des taux zéro-coupon est égal au taux zéro-coupon à un anticipé par le marché pour dans t années.
5) La forme la plus fréquente de la structure à terme des taux d'intérêt est une courbe des taux zéro-coupon croissante. Autrement dit, le taux de rendement exigé sur une obligation zéro-coupon sans risque est le plus souvent croissant avec sa maturité car ce taux de rendement intègre une prime de risque pour la non-disponibilité des fonds sur longue période. En effet,

en investissant à long terme, l'investisseur peut subir une perte en capital si des dépenses imprévues avant l'échéance de son placement l'obligent, faute de disposer de liquidités suffisantes, à le liquider avant l'échéance. Plus l'horizon d'investissement est long, plus le risque d'événements imprévisibles est important, si bien que la prime de risque exigée en compensation est croissante avec la maturité, toutes choses égales par ailleurs. La théorie qui rend compte de ce phénomène est la théorie de la préférence pour la liquidité de Hicks (1946). En effet, selon cette théorie, le taux zéro-coupon de maturité t années résulte des taux à un an successifs anticipés jusqu'en année t et d'une prime de risque croissante avec t.

B. Exercices d'application

Exercice 6.1

1) Étant donné que ces titres d'État sont remboursés au pair *in fine* et qu'ils paient leur prochain coupon dans un an exactement, leurs taux de rendement actuariels sont égaux à leurs taux nominaux et la courbe des taux de rendement s'établit comme au tableau ci-dessous.

Maturité	**TRA**
1 an	2,50 %
2 ans	3,00 %
3 ans	3,25 %
4 ans	2,75 %

2) Notons y_t le taux de rendement de maturité t et z_t le taux zéro-coupon de maturité t.

Le taux zéro-coupon à un an est égal au taux de rendement à un an :

$z_1 = y_1 = 2{,}5000$ %.

En l'absence d'opportunité d'arbitrage, la valeur du titre d'État à deux ans, soit 100 %, doit respecter l'égalité suivante :

$$100\ \% = \frac{3\ \%}{(1+z_1)} + \frac{103\ \%}{(1+z_2)^2}$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \sqrt{\frac{103\ \%}{100\ \% - \dfrac{3\ \%}{(1+z_1)}}} - 1 = 3{,}0075\ \%.$$

De même, pour le titre à trois ans, le prix de 100 % doit vérifier :

$$100\ \% = \frac{3{,}25\ \%}{(1+z_1)} + \frac{3{,}25\ \%}{(1+z_2)^2} + \frac{103{,}25\ \%}{(1+z_3)^3}$$

$$\Leftrightarrow z_3 = \sqrt[3]{\frac{103{,}25\ \%}{100\ \% - \frac{3{,}25\ \%}{(1+z_1)} - \frac{3{,}25\ \%}{(1+z_2)^2}}} - 1 = 3{,}2637\ \%.$$

Pour le titre à quatre ans,

$$100\ \% = \frac{2{,}75\ \%}{(1+z_1)} + \frac{2{,}75\ \%}{(1+z_2)^2} + \frac{2{,}75\ \%}{(1+z_3)^3} + \frac{102{,}75\ \%}{(1+z_4)^4}$$

$$\Leftrightarrow z_4 = \sqrt[4]{\frac{102{,}75\ \%}{100\ \% - \frac{2{,}75\ \%}{(1+z_1)} - \frac{2{,}75\ \%}{(1+z_2)^2} - \frac{2{,}75\ \%}{(1+z_3)^3}}} - 1 = 2{,}7377\ \%.$$

Formule générale à t années :

$$z_t = \sqrt[t]{\frac{100\ \% + y_t}{100\ \% - \sum_{k=1}^{t-1} \frac{y_t}{(1+z_k)^k}}} - 1.$$

La courbe des taux zéro-coupon s'établit comme au tableau ci-dessous.

Maturité	**TRA**	**Taux zéro-coupon**
1 an	2,50 %	2,5000 %
2 ans	3,00 %	3,0075 %
3 ans	3,25 %	3,2637 %
4 ans	2,75 %	2,7377 %

Cette courbe est bombée, croissante dans sa partie courte et décroissante à long terme.

3) Notons ${}_1f_t$ le taux à terme à un an dans t années. En l'absence d'opportunité d'arbitrage, ${}_1f_t$ doit vérifier $(1+z_{t+1})^{t+1} = (1+z_t)^t(1+{}_1f_t)$, ce qui équivaut à ${}_1f_t = \frac{(1+z_{t+1})^{t+1}}{(1+z_t)^t} - 1$.

En appliquant ce calcul à notre courbe de taux,

$${}_1f_1 = \frac{(1+z_2)^2}{(1+z_1)} - 1 = \frac{(1+3{,}0075\ \%)^2}{(1+2{,}5\ \%)} - 1 = 3{,}5176\ \%,$$

$${}_1f_2 = \frac{(1+z_3)^3}{(1+z_2)^2} - 1 = \frac{(1+3{,}2637\ \%)^3}{(1+3{,}0075\ \%)^2} - 1 = 3{,}7780\ \%,$$

$${}_1f_3 = \frac{(1+z_4)^4}{(1+z_3)^3} - 1 = \frac{(1+2{,}7377\ \%)^4}{(1+3{,}2637\ \%)^3} - 1 = 1{,}1757\ \%,$$

La courbe des taux à terme à un an est reportée dans le tableau ci-dessous.

Maturité	**TRA**	**Taux zéro-coupon**	**Taux à terme à un an**
1 an	2,50 %	2,5000 %	–
2 ans	3,00 %	3,0075 %	3,5176 %
3 ans	3,25 %	3,2637 %	3,7780 %
4 ans	2,75 %	2,7377 %	1,1757 %

4) Calculons le taux à terme à deux ans dans un an implicite à la courbe des taux :

$$_2f_1 = \sqrt{\frac{(1+z_3)^3}{(1+z_1)}} - 1 = \sqrt{\frac{(1+3{,}2637\ \%)^3}{(1+2{,}5000\ \%)}} - 1 = 3{,}6477\ \%\,.$$

Le taux coté par la banque est différent du taux à terme implicite. Il ne respecte donc pas l'absence d'opportunité d'arbitrage.

Exercice 6.2

1) Déterminons tout d'abord les TRA des quatre OAT. La date de négociation est le mercredi 1er mars. La date de règlement-livraison est donc le vendredi 3 mars. La date du prochain coupon est le 25 octobre, si bien que le nombre exact de jours séparant la date de règlement-livraison et la date du prochain coupon est 31 – 3 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 25 = 236.

Pour chaque OAT :

– la maturité du prochain coupon en nombre d'années est w = 236/365 = 0,6466 ;

– le coupon couru est égal au taux nominal multiplié par 1 – w ;

– le prix plein coupon est égal au prix pied de coupon plus le coupon couru.

Les résultats sont rapportés au tableau ci-dessous.

Titre	**Date d'échéance**	**Taux facial**	**Prix pied de coupon**	**Coupon couru**	**Prix plein coupon**
OAT 3,5 % 20N	25 oct. 20N	3,50 %	101,26 %	1,237 %	102,497 %
OAT 3 % 20N+1	25 oct. 20N+1	3,00 %	101,86 %	1,060 %	102,920 %
OAT 2,5 % 20N+2	25 oct. 20N+2	2,50 %	100,30 %	0,884 %	101,184 %
OAT 2,75 % 20N+3	25 oct. 20N+3	2,75 %	98,63 %	0,972 %	99,602 %

Le TRA de l'OAT 3,5 % 20N est y_w tel que :

$$102{,}497\ \% = \frac{103{,}50\ \%}{(1+y_w)^w} \Leftrightarrow y_w = 1{,}5200\ \%\,.$$

Le TRA de l'OAT 3 % 20N+1 est y_{1+w} tel que :

$$102{,}920\ \% = \frac{3\ \%}{(1+y_{1+w})^w} + \frac{103\ \%}{(1+y_{1+w})^{1+w}} \Rightarrow y_{1+w} = 1{,}8400\ \%\,.$$

Le TRA de l'OAT 2,5 % 20N+2 est y_{2+w} tel que :

$$101{,}184\ \% = \left(1+y_{2+w}\right)^{1-w}\left(2{,}5\ \%\frac{1-\left(1+y_{2+w}\right)^{-3}}{y_{2+w}}+\frac{100\ \%}{\left(1+y_{2+w}\right)^{3}}\right) \Rightarrow y_{2+w} = 2{,}3800\ \%.$$

Le TRA de l'OAT 2,75 % 20N+3 est y_{3+w} tel que :

$$99{,}602\ \% = \left(1+y_{3+w}\right)^{1-w}\left(2{,}5\ \%\frac{1-\left(1+y_{3+w}\right)^{-4}}{y_{3+w}}+\frac{100\ \%}{\left(1+y_{3+w}\right)^{4}}\right) \Rightarrow y_{3+w} = 3{,}1500\ \%.$$

Déterminons à présent les taux de rendement à un an, à deux ans et à trois ans par interpolation cubique. L'interpolation cubique suppose que chaque taux est un polynôme d'ordre 3. Sous cette hypothèse, le TRA de maturité x s'exprime sous la forme suivante :

$y_x = a + bx + cx^2 + dx^3$, où a, b, c et d sont des coefficients à déterminer à partir des taux déjà observés, soit y_w, y_{1+w}, y_{2+w} et y_{3+w}. Pour cela, il faut résoudre le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} y_w = a + bw + cw^2 + dw^3 \\ y_{1+w} = a + b(1+w) + c(1+w)^2 + d(1+w)^3 \\ y_{2+w} = a + b(2+w) + c(2+w)^2 + d(2+w)^3 \\ y_{3+w} = a + b(3+w) + c(3+w)^2 + d(3+w)^3, \end{cases}$$

qui, par écriture matricielle, devient :

$$\begin{pmatrix} y_w \\ y_{1+w} \\ y_{2+w} \\ y_{3+w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & 1+w & (1+w)^2 & (1+w)^3 \\ 1 & 2+w & (2+w)^2 & (2+w)^3 \\ 1 & 3+w & (3+w)^2 & (3+w)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & 1+w & (1+w)^2 & (1+w)^3 \\ 1 & 2+w & (2+w)^2 & (2+w)^3 \\ 1 & 3+w & (3+w)^2 & (3+w)^3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_w \\ y_{1+w} \\ y_{2+w} \\ y_{3+w} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}014255 \\ 0{,}000796 \\ 0{,}001018 \\ 0{,}000017 \end{pmatrix}.$$

Connaissant a, b, c et d, nous pouvons calculer y_1, y_2 et y_3.

$$y_1 = a + b + c + d = 1{,}6086\ \%,$$

$$y_2 = a + b\times 2 + c\times 2^2 + d\times 2^3 = 2{,}0052\ \%,$$

$$y_3 = a + b\times 3 + c\times 3^2 + d\times 3^3 = 2{,}6253\ \%.$$

La courbe des TRA pour des maturités entières s'établit donc comme suit.

Maturité	TRA
1 an	1,6086 %
2 ans	2,0052 %
3 ans	2,6253 %

2) Notons z_t le taux zéro-coupon de maturité t.

En l'absence d'opportunité d'arbitrage, on démontre que $z_t = \sqrt[t]{\dfrac{100\,\% + y_t}{100\,\% - \sum_{k=1}^{t-1} \dfrac{y_t}{(1+z_k)^k}}} - 1.$

Par conséquent, en procédant par itérations :

$z_1 = y_1 = 1{,}6086\,\%$;

$$z_2 = \sqrt{\frac{102{,}0052\,\%}{100\,\% - \dfrac{2{,}0052\,\%}{(1+1{,}6086\,\%)}}} - 1 = 2{,}0092\,\%.$$

$$z_3 = \sqrt[3]{\frac{102{,}6253\,\%}{100\,\% - \dfrac{2{,}6253\,\%}{(1+z_1)} - \dfrac{2{,}6253\,\%}{(1+z_2)^2}}} - 1 = 2{,}6455\,\%.$$

Maturité	TRA	Taux zéro-coupon
1 an	1,6086 %	1,6086 %
2 ans	2,0052 %	2,0092 %
3 ans	2,6253 %	2,6455 %

3) Notons V la valeur d'arbitrage de cette obligation.

$$V = \frac{4{,}8\,\%}{(1+z_1+2{,}3\,\%)} + \frac{4{,}8\,\%}{(1+z_2+2{,}3\,\%)^2} + \frac{104{,}8\,\%}{(1+z_3+2{,}3\,\%)^3} = 99{,}70\,\%$$

3) Notons V^* la valeur d'arbitrage de cette obligation.

$$V^* = \frac{5{,}1\,\%}{(1+z_1+2{,}7\,\%)} + \frac{5{,}1\,\%}{(1+z_2+2{,}7\,\%)^2} + \frac{105{,}1\,\%}{(1+z_3+2{,}7\,\%)^3} = 99{,}44\,\%$$

Exercice 6.3

1) Notons y_t the TRA de maturité t années et z_t le taux zéro-coupon de maturité t années.

Le taux zéro-coupon à six mois est $z_{0,5} = y_{0,5} = 0{,}7800\%$.

En l'absence d'opportunité d'arbitrage, le taux zéro-coupon à un an, z_1, doit vérifier :

$$\frac{y_1/2}{(1+z_{0,5}/2)} + \frac{100\% + y_1/2}{(1+z_1/2)^2} = 100\%$$

$$\Leftrightarrow z_1 = 2\times\left(\sqrt{\frac{100\% + y_1/2}{100\% - \frac{y_1/2}{(1+z_{0,5}/2)}}} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow z_1 = 2\times\left(\sqrt{\frac{100\% + 1{,}2\ \%_1/2}{100\% - \frac{1{,}2\ \%/2}{(1+0{,}78\ \%/2)}}} - 1\right) = 1{,}2013\ \%.$$

On utilise le même raisonnement pour déterminer le taux zéro-coupon à un an et demi $z_{1,5}$:

$$\frac{y_{1,5}/2}{(1+z_{0,5}/2)} + \frac{y_{1,5}/2}{(1+z_1/2)^2} + \frac{100\% + y_{1,5}/2}{(1+z_{1,5}/2)^3} = 100\%$$

$$\Leftrightarrow z_{1,5} = 2\times\left(\sqrt[3]{\frac{100\% + y_{1,5}/2}{100\% - \frac{y_{1,5}/2}{(1+z_{0,5}/2)} - \frac{y_{1,5}/2}{(1+z_1/2)^2}}} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow z_{1,5} = 2\times\left(\sqrt[3]{\frac{100\% + y_{1,5}/2}{100\% - \frac{y_{1,5}/2}{(1+z_{0,5}/2)} - \frac{y_{1,5}/2}{(1+z_1/2)^2}}} - 1\right) = 1{,}8574\ \%.$$

De même, pour le taux zéro-coupon à deux ans :

$$z_2 = 2\times\left(\sqrt[4]{\frac{100\% + y_2/2}{100\% - \frac{y_2/2}{(1+z_{0,5}/2)} - \frac{y_2/2}{(1+z_1/2)^2} - \frac{y_2/2}{(1+z_{1,5}/2)^3}}} - 1\right) = 2{,}7463\ \%.$$

La formule générale du taux zéro-coupon à t années est :

$$z_t = 2\times\left(\sqrt[2t]{\frac{100\% + y_t/2}{100\% - \sum_{k=1}^{2t-1} \frac{y_t/2}{(1+z_{k/2}/2)^k}}} - 1\right).$$

La courbe des taux zéro-coupon obtenue est reportée au tableau ci-dessous.

Maturité	**TRA**	**Taux zéro-coupon**
6 mois	0,78 %	0,7800 %
1 an	1,20 %	1,2013 %
1,5 an	1,85 %	1,8574 %
2 ans	2,72 %	2,7463 %

2) Notons ${}_{0,5}f_1$ le taux à 6 mois dans 1 an.

$$ {}_{0,5}f_1 = 2\times\left(\frac{\left(1+\frac{z_{1,5}}{2}\right)^3}{\left(1+\frac{z_1}{2}\right)^2}-1\right) = 2\times\left(\frac{\left(1+\frac{1,8574\,\%}{2}\right)^3}{\left(1+\frac{1,2013\,\%}{2}\right)^2}-1\right) = 3,1760\,\%\,. $$

3) Notons Z_2 le prix d'un *Treasury strip* versant 1 000 $ dans 2 ans.

$$ Z_2 = \frac{1\,000}{\left(1+\frac{z_2}{2}\right)^4} = \frac{1\,000}{\left(1+\frac{2,7463\,\%}{2}\right)^4} = 946,91\,\$\,. $$