Contrôle des connaissances du chapitre 5 - Corrigés

A. Questions de cours

1) L'avantage de la méthode des scénarios est de fournir des résultats exacts sur les pertes en capital causées les fluctuations de taux envisagées. Elle présente cependant deux inconvénients : le choix des scénarios simulés est arbitraire et les calculs à effectuer peuvent être lourds pour un portefeuille composé de nombreuses obligations différentes avec des caractéristiques complexes telles que des sorties optionnelles ou d'autres options.
2) Les gains et les pertes en capital subies sur une obligation à taux fixe sont symétriques à la hausse et à la baisse des taux pour des variations de taux de faible ampleur. En revanche, pour des variations de taux importantes, les gains et les pertes en capital ne sont pas symétriques. Le gain en capital pour une baisse de taux donnée est plus grand que la perte en capital causée par une hausse de taux de même ampleur.
3) A la date t–1,25 ans, la duration de Macaulay est égale à 5,7580 – 1,25 = 5,5080 années. En effet, la duration de Macaulay est une moyenne pondérée des maturités des paiements du titre. 1,25 années plus tard, la maturité de chaque paiement a diminué de 1,25 ans et leur moyenne est donc inférieure de 1,25.
4) L'hypothèse implicite est que la fonction de prix de l'obligation est linéaire avec pour coefficient directeur $-D^{mod}$.
5) La duration de Macaulay est égale à la duration modifiée multipliée par un plus le taux d'actualisation.
6) La duration diminue avec le TRA initial. Plus le TRA initial est élevé, moins fort est l'impact d'une hausse de taux sur le prix. Cette propriété est liée à la convexité de la fonction de prix.
7) D'après le théorème de l'immunisation, la valeur future d'un portefeuille est insensible aux variations de taux lorsque la duration de Macaulay du portefeuille est égale à l'horizon d'investissement. Afin d'immuniser un portefeuille contre le risque de taux, il convient donc de le recomposer régulièrement pour que sa duration corresponde à l'horizon d'investissement.

8) Notons C la convexité de l'obligation et D^{Mac} sa duration de Macaulay. Notons V la valeur de l'obligation et y son TRA. Si $\{F_s\}_{s=1}^{2T}$ est la série des flux semestriels versés par l'obligation, $V=\sum_{s=1}^{2T}\frac{F_s}{(1+y/2)^s}$. La formule de la convexité est :

$$C=\frac{1}{4}\times\frac{\sum_{s=1}^{2T}s^2w_s+2\times D^{Mac}}{(1+y/2)^2}$$

où $w_s=\frac{F_s/(1+y/2)^s}{V}$ et $D^{Mac}=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2T}w_s\times s=\frac{1}{2V}\sum_{t=1}^{2T}s\times F_s\Big/\left(1+\frac{y}{2}\right)^s$.

Pour calculer la convexité sur la base de simulations de chocs de taux Δy, il faut calculer la valeur de l'obligation V_+ pour un taux d'actualisation $y+\Delta y$ et la valeur V_- pour un taux d'actualisation $y-\Delta y$. La formule de calcul de la convexité est alors

$$C=\frac{V_++V_--2V}{V(\Delta y)^2}.$$

9) La convexité permet de corriger l'erreur d'estimation liée à l'hypothèse de linéarité de la fonction de prix que suppose une estimation des variations de prix fondée sur la duration uniquement. En ajustant l'estimation pour la convexité, la majeure partie de l'erreur d'estimation est éliminée.

10) A duration identique, le risque de taux diminue avec la convexité.

B. Exercices d'application

Exercice 5.1

1) La date de règlement-livraison est en J+2, soit le 15 septembre 2016.

Nombre de jours restant jusqu'à la prochaine date de coupon : 15 + 31 + 25 = 71 jours.

Maturité du prochain coupon en nombre d'années : w = 71/366 = 0,1940.

Coupon couru = (1 – w) × 1 % = 0,806 %.

Prix plein coupon = 107,28 % + 0,806 % = 108,086 %.

Le TRA de cette OAT est le taux d'actualisation y tel que :

$$108{,}086\,\%=(1+y)^{1-w}\times\left(1\,\%\,\frac{1-(1+y)^{-10}}{y}+\frac{100\,\%}{(1+y)^{10}}\right)\Rightarrow y=0{,}2001\,\%.$$

La duration de Macaulay se calcule ensuite grâce au tableau suivant.

Année	***t+w***	$\frac{CF_t}{(1+0{,}2001\,\%)^{t+w}}$	$(t+w)\times\frac{CF_t}{(1+0{,}2001\,\%)^{t+w}}$
2016	0,1940	0,9996	0,1939
2017	1,1940	0,9976	1,1911
2018	2,1940	0,9956	2,1844
2019	3,1940	0,9936	3,1737
2020	4,1940	0,9917	4,1590
2021	5,1940	0,9897	5,1403
2022	6,1940	0,9877	6,1178
2023	7,1940	0,9857	7,0913
2025	9,1940	99,1610	911,6849
	Somme	**108,086**	**949,00**

Duration de Macaulay = 949,00/108,086 = 8,78 années.

2) La convexité se calcule en ajoutant au tableau une colonne dans laquelle les maturités au carré sont pondérées par les valeurs actuelles des paiements.

Année	***t+w***	$\frac{CF_t}{(1+0{,}2001\,\%)^{t+w}}$	$(t+w)\times\frac{CF_t}{(1+0{,}2001\%)^{t+w}}$	$(t+w)^2\times\frac{CF_t}{(1+0{,}2001\%)^{t+w}}$
2016	0,1940	0,9996	0,1939	0,0376
2017	1,1940	0,9976	1,1911	1,4222
2018	2,1940	0,9956	2,1844	4,7925
2019	3,1940	0,9936	3,1737	10,1366
2020	4,1940	0,9917	4,1590	17,4427
2021	5,1940	0,9897	5,1403	26,6989
2022	6,1940	0,9877	6,1178	37,8935
2023	7,1940	0,9857	7,0913	51,0147
2024	8,1940	0,9838	8,0609	66,0508
2025	9,1940	99,1610	911,6849	8 382,0207
	Somme	108,086	948,9973	8 597,5103
			Duration de Macaulay	8,7800
			Convexité	87,9709

Convexité = (8 517,5103/108,086 + 8,78) / (1 + 0,2001 %)² = 87,9709 années.

Exercice 5.2

1) La date de règlement-livraison est en J+1, soit le 22 août 2016. Le nombre exact de jours en la date de règlement-livraison (22 août 2016) et la prochaine date de coupon (15 novembre 2016) est : 31 – 22 + 30 + 31 + 15 = 85. Le nombre exact de jours dans la période de coupon

en cours (du 15 mai au 15 novembre 2016) est de 184. La maturité du prochain coupon en nombre de semestres est donc : $w = 85/184 = 0{,}4620$.

Le coupon couru vaut $0{,}5 \times 2{,}5\ \% \times (1 - w) = 0{,}676\ \%$.

Le prix plein coupon est donc 102,73 % + 0,676 % = 103,41 %.

La duration de Macaulay se calcule grâce au tableau ci-dessous.

Semestre	$s+w$	$\frac{CF_s}{(1+1{,}10\ \%)^{s+w}}$	$(s+w)\times\frac{CF_s}{(1+1{,}10\%)^{s+w}}$
2016-2	0,4620	1,2437	0,5745
2017-1	1,4620	1,2302	1,7985
2017-2	2,4620	1,2168	2,9957
2018-1	3,4620	1,2035	4,1666
2018-2	4,4620	1,1904	5,3117
2019-1	5,4620	1,1775	6,4314
2019-2	6,4620	1,1647	7,5261
2020-1	7,4620	1,1520	8,5963
2020-2	8,4620	1,1395	9,6422
2021-1	9,4620	1,1271	10,6644
2021-2	10,4620	1,1148	11,6632
2022-1	11,4620	1,1027	12,6390
2022-2	12,4620	1,0907	13,5921
2023-1	13,4620	1,0788	14,5231
2023-2	14,4620	1,0671	15,4321
2024-1	15,4620	1,0555	16,3197
2024-2	16,4620	1,0440	17,1861
2025-1	17,4620	1,0326	18,0318
2025-2	18,4620	1,0214	18,8570
2026-1	19,4620	1,0103	19,6621
2026-2	20,4620	80,9426	1 656,2437
	Somme	103,41	1 871,86

Dans ce tableau, les maturités sont exprimées en nombre de semestres et le taux d'actualisation est un taux semestriel, soit 2,2 %/2 = 1,1 %. En divisant 1 871,86 par le prix plein coupon de 103,41, on obtient la duration de Macaulay en nombre de semestres. Pour l'exprimer en nombre d'années, il faut diviser le résultat par deux, si bien que :

$D^{Mac} = (1/2) \times (1\ 871{,}86/103{,}41) = 9{,}05$ années.

2) Pour calculer, la convexité, il faut ajouter au tableau une colonne contenant les maturités au carré pondérées par les paiements actualisés.

Semestre	**s+w**	$\frac{CF_s}{(1+1{,}10\ \%)^{s+w}}$	$(s+w)\times\frac{CF_s}{(1+1{,}10\%)^{s+w}}$	$(s+w)^2\times\frac{CF_s}{(1+1{,}10\%)^{s+w}}$
2016-2	0,4620	1,2437	0,5745	0,2654
2017-1	1,4620	1,2302	1,7985	2,6293
2017-2	2,4620	1,2168	2,9957	7,3752
2018-1	3,4620	1,2035	4,1666	14,4246
2018-2	4,4620	1,1904	5,3117	23,7007
2019-1	5,4620	1,1775	6,4314	35,1282
2019-2	6,4620	1,1647	7,5261	48,6336
2020-1	7,4620	1,1520	8,5963	64,1450
2020-2	8,4620	1,1395	9,6422	81,5920
2021-1	9,4620	1,1271	10,6644	100,9059
2021-2	10,4620	1,1148	11,6632	122,0196
2022-1	11,4620	1,1027	12,6390	144,8672
2022-2	12,4620	1,0907	13,5921	169,3845
2023-1	13,4620	1,0788	14,5231	195,5089
2023-2	14,4620	1,0671	15,4321	223,1789
2024-1	15,4620	1,0555	16,3197	252,3346
2024-2	16,4620	1,0440	17,1861	282,9174
2025-1	17,4620	1,0326	18,0318	314,8700
2025-2	18,4620	1,0214	18,8570	348,1367
2026-1	19,4620	1,0103	19,6621	382,6628
2026-2	20,4620	80,9426	1 656,2437	33 889,9874
	Somme	103,41	1 871,86	36 704,67

La convexité est $C=\frac{1}{4}\times\frac{\frac{36\ 704{,}67}{103{,}41}+2\times D^{Mac}}{(1+1{,}1\ \%)^2}$ = 91,25 années.

3) Estimation de la hausse de prix pour une baisse de taux de 1 %

$$\Delta V \text{ en } \% = \frac{-D^{Mac}}{(1+1{,}1\ \%)}\times(-1\ \%)+\frac{1}{2}\times C\times(-1\ \%)^2 = 9{,}4088\ \%$$

$$\Delta V \text{ en } \$ = \left(\frac{-D^{Mac}}{(1+1{,}1\ \%)}\times(-1\ \%)+\frac{1}{2}\times C\times(-1\ \%)^2\right)\times 103{,}41 = 9{,}73\ \$$$

Estimation de la baisse de prix pour une hausse de taux de 1 %

$$\Delta V \text{ en } \% = \frac{-D^{Mac}}{(1+1{,}1\ \%)}\times 1\ \%+\frac{1}{2}\times C\times(1\ \%)^2 = -8{,}4963\ \%$$

$$\Delta V \text{ en } \$ = \left(\frac{-D^{Mac}}{(1+1{,}1\ \%)}\times 1\ \%+\frac{1}{2}\times C\times(1\ \%)^2\right)\times 103{,}41 = -8{,}79\ \$$$