Contrôle des connaissances du chapitre 3 - Corrigés

A. Questions de cours

1) Notons y le taux d'actualisation. La valeur de l'obligation est égale à la somme des valeurs actuelles de ses paiements : $V=\sum_{t=1}^{T}\frac{Ci}{(1+y)^t}+\frac{C}{(1+y)^T}$. La somme des valeurs actuelles des coupons est la somme des termes d'une suite géométrique de 1er terme $\frac{Ci}{(1+y)}$, de raison $\frac{1}{(1+y)}$ et dont le nombre de termes est T. Appliquons la formule mathématique de la somme des termes d'une suite géométrique à cette somme. Nous obtenons que $V=\frac{Ci}{(1+y)}\times\frac{1-\left(\frac{1}{1+y}\right)^T}{1-\left(\frac{1}{1+y}\right)}+\frac{C}{(1+y)^T}$. En simplifiant les dénominateurs, nous obtenons la formule actuarielle de la valeur de cette obligation : $V=Ci\times\frac{1-(1+y)^{-T}}{y}+\frac{C}{(1+y)^T}$.

2) Toutes choses égales par ailleurs, la valeur d'une obligation à taux fixe converge vers la valeur de remboursement au cours du temps entre la date d'émission et la date d'échéance. Si la valeur de remboursement est égale au pair, le prix de l'obligation converge vers le pair au fur et à mesure que l'on s'approche de la date d'échéance.

3) La convention du « *bond-equivalent yield* » est la convention selon laquelle le taux de coupon semestriel et le taux de rendement semestriel d'une obligation à coupons semestriels sont calculés en divisant par deux les taux annuels. Autrement dit, ils sont déterminés selon la règle du taux proportionnel.

4) Notons C le paiement final du *Treasury strip*. La formule du prix est $\frac{C}{(1+y/2)^{2T}}$.

5) Le taux de rendement courant d'une obligation est égal au montant annuel des coupons divisé par le prix plein coupon.

6) Notons P_0^{achat} le prix d'achat de l'obligation, T sa maturité, $(F_t)_{t=1}^{T}$ la série des paiements payés par l'obligation de l'année 1 à l'année T, y son TRA et VF_T sa valeur future à maturité.

Etant donné que les flux intermédiaires sont réinvestis au taux y, $VF_T = \sum_{t=1}^{T} F_t(1+y)^{T-t}$.

Etant donné que y est le TRA, $P_0^{achat} = \sum_{t=1}^{T} F_t(1+y)^{-t}$.

Le TRE est $x = \left(\frac{VF_T}{P_0^{achat}}\right)^{1/T} - 1$. En remplaçant VF_T et P_0^{achat} par leurs valeurs en fonction des paiements F_t et de y, on obtient que $x = \left(\frac{\sum_{t=1}^{T} F_t(1+y)^{T-t}}{\sum_{t=1}^{T} F_t(1+y)^{-t}}\right)^{1/T} - 1$.

En factorisant le numérateur par $(1+y)^T$,

$$x = \left((1+y)^T \times \frac{\sum_{t=1}^{T} F_t(1+y)^{-t}}{\sum_{t=1}^{T} F_t(1+y)^{-t}}\right)^{1/T} - 1 = \left((1+y)^T\right)^{1/T} - 1 = y.$$

c.q.f.d.

B. Exercices d'application

Exercice 3.1

1) $V = 4{,}5 \times \frac{1-(1+5\%)^{-7}}{5\%} + \frac{100}{(1+5\%)^7} = 26{,}04 + 71{,}07 = 97{,}11$ €

2) $V = \frac{60}{(1+6\%)} + \frac{60}{(1+6\%)^2} + \frac{100}{(1+6\%)^3} + \frac{100}{(1+6\%)^4} + \frac{160}{(1+6\%)^5} + \frac{2\,160}{(1+6\%)^6}$

$V = 56{,}60 + 53{,}40 + 83{,}96 + 79{,}21 + 119{,}56 + 1\,522{,}71 = 1\,915{,}45$ €

Exercice 3.2

1) $V(3\%) = 4 \times \frac{1-(1+3\%)^{-10}}{3\%} + \frac{100}{(1+3\%)^{10}} = 34{,}12 + 74{,}41 = 108{,}53$ €

$V(4\%) = 4 \times \frac{1-(1+4\%)^{-10}}{4\%} + \frac{100}{(1+4\%)^{10}} = 32{,}44 + 67{,}56 = 100{,}00$ €

$$V(5\%) = 4 \times \frac{1-(1+5\%)^{-10}}{5\%} + \frac{100}{(1+5\%)^{10}} = 30{,}89 + 61{,}39 = 92{,}28\ €$$

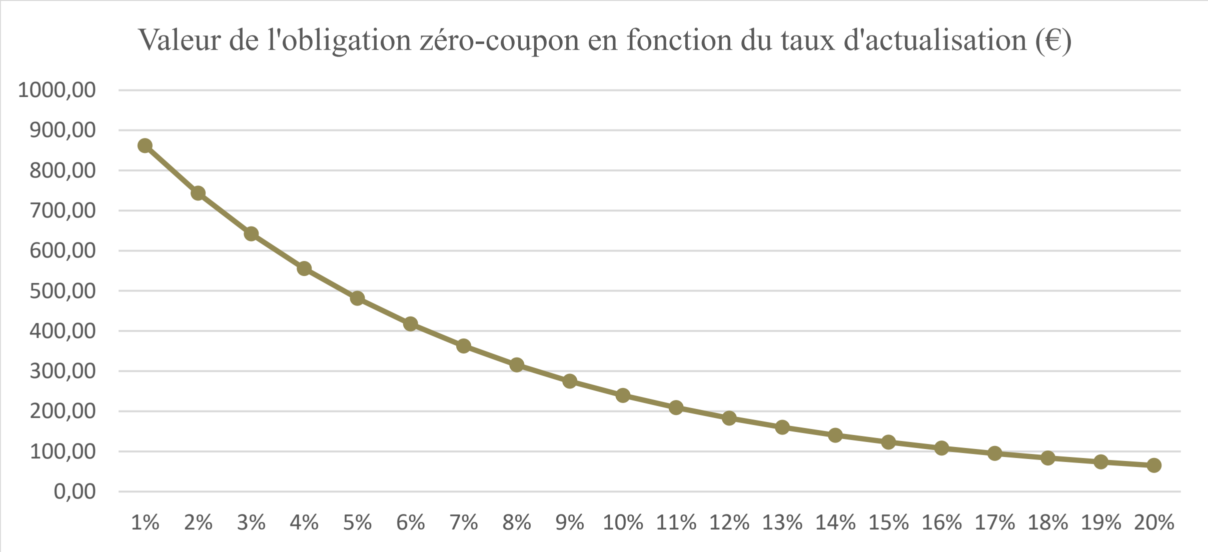
2) Avec un taux d'actualisation de 3%, inférieur au taux facial de 4%, la valeur calculée est en surcote. Avec un taux d'actualisation de 4%, c'est-à-dire égal au taux facial, la valeur trouvée est égale au pair. Avec un taux d'actualisation de 5%, supérieur au taux facial de 4%, la valeur obtenue est en décote. Cela est conforme à la propriété selon laquelle, la valeur est supérieure au pair pour un taux d'actualisation inférieur au taux facial, la valeur est supérieure au pair pour un taux d'actualisation inférieur au taux facial, et la valeur est égale au pair pour un taux d'actualisation égal au taux facial. Cette propriété s'applique aux obligations vanille sans coupon couru, ce qui est le cas ici. S'il existe un coupon couru, la propriété s'applique au prix pied de coupon.

Exercice 3.3

$$V = 25 \times \left(\frac{1-(1+4\%)^{-14}}{4\%} \right) + \frac{1\,000}{(1+4\%)^{14}} = 264{,}08 + 577{,}48 = 841{,}56\ \$.$$

Exercice 3.4

Taux d'actualisation	Valeur
1%	861,35
2%	743,01
3%	641,86
4%	555,26
5%	481,02
6%	417,27
7%	362,45
8%	315,24
9%	274,54
10%	239,39
11%	209,00
12%	182,70
13%	159,89
14%	140,10
15%	122,89
16%	107,93
17%	94,89
18%	83,52
19%	73,59
20%	64,91



La valeur est décroissante et convexe en fonction du taux d'actualisation.

Exercice 3.5

1) La date de règlement-livraison est le vendredi 12 février 2016. L'année 2016 est bissextile. Le nombre de jours entre le 12 février et le 1^er^ juin est donc (29–12)+31+30+31+1=110. La maturité du prochain coupon est $w = 110 / 366 = 0{,}3005$ année. $1-w$ = (366–110)/366 = 256/366. Chaque coupon annuel vaut de 5%×2 000 = 100 €. Entre la date du 1er février et l'échéance du 1er juin 2016, le titre versera quatre paiements annuels. Son prix plein coupon est $(1+3{,}25\%)^{(256/366)}\left[100\times\frac{1-(1+3{,}25\%)^{-4}}{3{,}25\%}+\frac{2\ 000}{(1+3{,}25\%)^{4}}\right]$ =2 177,50 €, soit 108,87% du nominal.
2) Le coupon couru vaut $100\times(1-w) = 100\times(256/366)$ = 69,95 €, soit 3,498% du nominal. Le prix pied de coupon est égal à 2 177,50-69,95 = 2 107,55 €, soit 105,38% du nominal.

Exercice 3.6

1) Prix plein coupon $=(1+0{,}7\%)^{(150/184)}\left[1\times\frac{1-(1+0{,}7\%)^{-6}}{0{,}7\%}+\frac{100}{(1+0{,}7\%)^{6}}\right]$=102,34 \$, soit 102,34% du pair.
2) Coupon couru = 1×(150/184) = 0,82 \$, soit 0,815% du pair.
   Prix pied de coupon = 102,34 – 0,82 = 101,52 \$, soit 101,52% du pair.

Exercice 3.7

La marge actuarielle est la marge *dm* telle que

$$VA = (2\% + 0{,}50\%) \times \frac{1-(1+2\%+dm)^{-4}}{2\%+dm} + \frac{100\%}{(1+2\%+dm)^4} = 99{,}62\%.$$

La valeur de *dm* vérifiant cette formule est *dm*=0,60%.

Exercice 3.8

1) Le TRA à l'échéance est le taux y tel que $4\% \dfrac{1-(1+y)^{-14}}{y} + \dfrac{100\%}{(1+y)^{-14}} = 102{,}08\%$. La solution est $y = 3{,}81\%$.

2) Le TRA à l'exercice de la CRA est y' tel que $4\% \dfrac{1-(1+y')^{-7}}{y'} + \dfrac{102\%}{(1+y')^{-7}} = 102{,}08\%$. La solution est $y = 3{,}91\%$.

3) La valeur future d'une obligation dans sept ans à l'exercice de la CRA est $VF_{7\ ans} = 40 \times \dfrac{(1+2\%)^7 - 1}{2\%} + 1\,020 = 1\,317{,}37$ €. Cette somme est réinvestie pendant trois ans puisque l'horizon d'investissement est de 10 ans. La valeur future dans 10 ans est donc $VF_{10\ ans} = \left(40 \times \dfrac{(1+2\%)^7 - 1}{2\%} + 1\,020 \right)(1+2\%)^3 = 1\,398{,}00$ €.

Le TRE est égal à $\left(\dfrac{1\,398{,}00}{1\,020{,}80} \right)^{1/10} - 1 = 3{,}19\%$.

Exercice 3.9

Une obligation à coupons semestriels a une valeur faciale de 100 \$ et un taux facial de 5%. Elle est remboursée au pair dans 6 ans. Son prochain coupon est payé dans un semestre exactement. Son prix sur le marché est de 101 3/8. Le taux de réinvestissement de l'investisseur est de 2,5%. L'horizon d'investissement est identique à la maturité du titre.

1) Le TRA à l'échéance est le taux y tel que $2{,}5 \times \dfrac{1-(1+y/2)^{-12}}{y/2} + \dfrac{100}{(1+y/2)^{12}} = 101{,}375$. La solution est y = 4,73%.

2) La valeur future dans 6 ans est $VF_{6\ ans} = 2{,}5 \times \dfrac{(1+1{,}2\%)^{12} - 1}{1{,}2\%} + 100 = 132{,}06$ \$.

On en déduit que le TRE est $\left(\left(\dfrac{132{,}06}{101{,}375} \right)^{1/12} - 1 \right) \times 2 = 4{,}46\%$.

3) Revenu total : 132,06 – 101,375 = 30,685 \$.

   Revenu en coupons : $2{,}5 \times 12 = 30$ \$

   Revenu en réinvestissement : $2{,}5 \times \dfrac{(1 + 1{,}2\%)^{12} - 1}{1{,}2\%} - 30 = 2{,}06\ \$$

   Gain en capital : 100 – 101,375 = –1,375 \$.

Le revenu en réinvestissement correspond à 2,06/30,685 = 6,71%. Les coupons sont la principale source de revenu.